O que é o centro de massa ?

Guilherme de Almeida

Diz-se frequentemente que as estrelas duplas orbitam em torno do seu centro de massa (**CM**) comum. A Terra e a Lua orbitam em torno do centro de massa respectivo, etc. Afinal, o que é o centro de massa de um sistema de "corpos"?. Farei alguma considerações justificativas, mas os leitores que não queiram seguir todos os passos podem reter as conclusões. Simplifiquemos para o caso de 2 corpos apenas. Admitamos ainda que são ambos esféricos e homogéneos ou, pelo menos, constituídos por camadas homogéneas (podendo cada camada ter densidade diferente das outras). Nestas condições a distribuição de massa é equilibrada simetricamente em relação ao centro de cada esfera.

Liguemos duas esferas de massas diferentes (m_1 e m_2) por meio de um varão de massa muito pequena e desprezável (Fig. 1). Por tentativa e erro podemos encontrar a posição onde colocar um apoio, de modo que o conjunto fique em equilíbrio, tendo-se então a situação ilustrada na Fig. 2. O ponto de apoio, nessas condições, marca aproximadamente o centro de gravidade (**CG**) do sistema. Digo aproximadamente, porque o CG em questão estará no eixo do varão e não na sua superfície lateral. Se a massa do varão não for desprezável, o que se encontra na Fig. 2 é o CG do conjunto m_1+m_2+$m_{\text{VARÃO}}$.

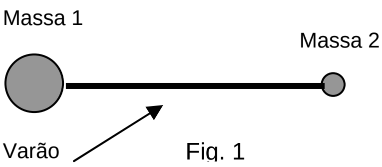

Fig. 1

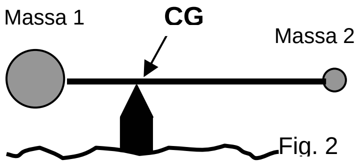

Fig. 2

Para o caso que nos interessa aqui (forças gravitacionais exteriores paralelas entre si), o centro de gravidade coincide com o centro de massa (CM). No entanto, o CG só se pode definir se o sistema estiver submetido a forças gravitacionais exteriores, enquanto que o centro de massa *existe* mesmo que o sistema (m_1 + m_2) esteja isolado. Considerando um planeta e o seu satélite, ou uma estrela dupla, não necessitaremos sequer do varão, aqui utilizado apenas para concretizar a experiência. Uma das propriedades mais importantes do CM é que podemos considerar concentrada nele toda a massa do sistema.

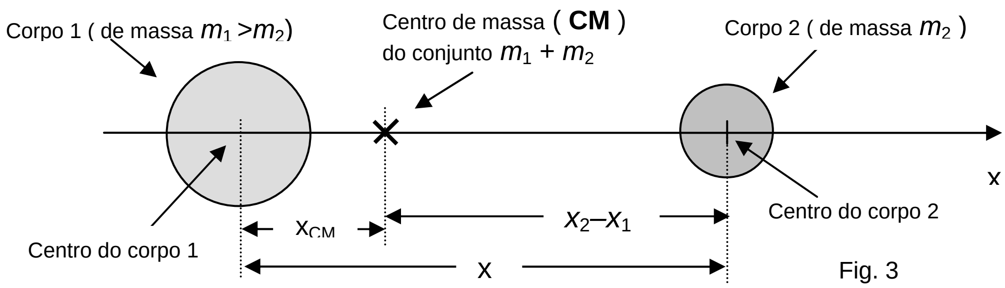

Fig. 3

Informações sobre a Fig. 3:
x_1=0 (o centro do corpo 1 está, por comodidade, na coordenada x=0);
x_2=d (coordenada do centro do corpo 2 = distância entre os centros dos dois corpos, devido à condição anterior); x_{CM}=d_1 (coordenada do centro de massa do conjunto m_1+m_2 = distância entre o centro do corpo 1 e o centro de massa do conjunto); x_2–x_1= d_2 (distância entre o centro do corpo 1 e o centro do corpo 2).

A coordenada x do CM é, por definição, a *média ponderada* das coordenadas x dos centros dos diversos corpos (partículas) constituintes do sistema, de tal modo que o factor de ponderação para cada corpo é a respectiva massa (o CM está, portanto mais próximo da maior massa e mais afastado da menor massa). Consequentemente

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \times 0 + m_2 x_2}{m_{(\text{total})}} = \frac{m_2 x_2}{m_{(\text{total})}}.$$ Fazendo as substituições referidas na legenda anterior,

obtém-se: $d_1 = \dfrac{m_2 d}{m_1 + m_2} \Leftrightarrow m_1 d_1 + m_2 d_1 = m_2 d \Leftrightarrow m_1 d_1 = m_2 (d - d_1)$. Mas, como d–d_1=d_2,

podemos concluir que $m_1 d_1 = m_2 d_2$, ou seja $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{d_2}{d_1}$ (1.ª equação).

O centro de massa (**CM**) encontra-se, portanto, numa posição tal que a distância entre os centros dos dois corpos é por ele dividida em dois segmentos de comprimentos inversamente proporcionais às respectivas massas. O centro de massa fica, portanto, entre os centros dos dois corpos, mais próximo do que tiver maior massa. Na figura anterior $m_1 = 2\ m_2$ e, por isso, $d_1 = d_2/2$. Se fosse $m_1 = m_2$ o CM ficaria precisamente no ponto médio entre os centros de m_1 e de m_2, tendo-se então $d_1 = d_2$.

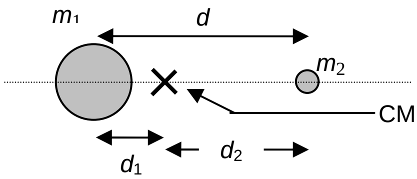

Fig. 4

Podemos dar outra forma interessante à equação $\frac{m_1}{m_2} = \frac{d_2}{d_1}$, pois $d_2 = d - d_1$, como se vê na Fig. 2 , pelo que $\frac{m_1}{m_2} = \frac{d - d_1}{d_1} = \frac{d}{d_1} - 1$ e, consequentemente, $\frac{d}{d_1} = \frac{m_1}{m_2} + 1$ (2.ª equação)

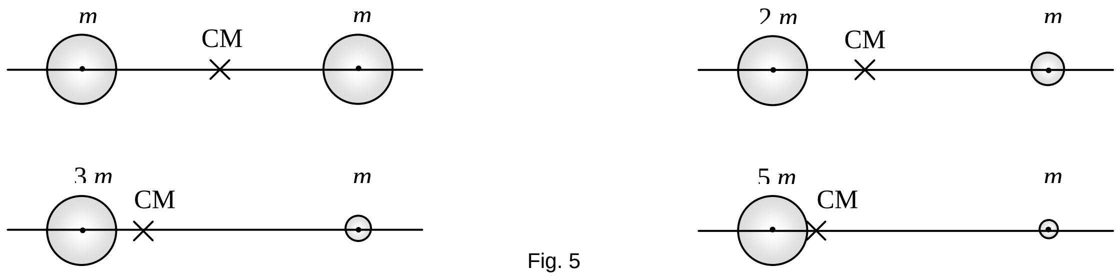

Fig. 5

A Fig. 5 mostra as posições do CM em alguns casos. No caso de grandes desproporções de massa entre m_1 e m_2, o CM do sistema pode encontrar-se ainda *dentro* do corpo de maior massa, mas não no seu centro. Por exemplo, no sistema Terra-Lua, em que massa do nosso planeta é 81,3 vezes superior à do seu satélite natural, o centro de massa do conjunto está *dentro da Terra*, a cerca de 4670 km do seu centro e aproximadamente a 1707 km da sua superfície, do lado voltado para a Lua .

Em rigor, a Terra a e Lua orbitam em torno do CM do sistema Terra-Lua, num período de 27,3 dias, que é o período da translação lunar. Como a distância Terra-Lua varia ligeiramente, devido à forma elíptica da órbita lunar, estas distâncias também se alteram ciclicamente e a distância entre o CM do sistema e o centro da Terra varia ligeiramente durante os referidos 27,3 dias. No entanto, *a relação* entre essas duas distâncias (d_1 e d_2) mantém-se. No caso das estrelas duplas, as desproporções de massa não em geral são tão grandes e o CM desses sistemas fora da fotosfera de ambas as estrelas. Por exemplo, se for $m_1 = 3\ m_2$, ter-se-á $d_2/d_1 = m_1/m_2 = 3$ e, pela segunda equação , $d_1/d = 4$.

A Fig. 5 mostra as órbitas verdadeiras de uma binária, constituída pela componente primária (P) e pela componente secundária (S), com metade da massa da primária. Enquanto a componente principal vai ocupando as posições sucessivas P_1, P_2, P_3, P_4, etc., a secundária vai passando, respectivamente, por S_1, S_2, S_3, S_4, etc. As distâncias dos centros das duas estrelas ao foco comum (que é o CM do sistema) vão variando, devido à forma elíptica das órbitas, mas *a relação entre elas* mantém-se constante e, neste caso, vale ½ , porque é essa a relação entre a massa da secundária e a da primária. Teremos assim,

$$\frac{\overline{P_1F}}{\overline{S_1F}} = \frac{\overline{P_2F}}{\overline{S_2F}} = \frac{\overline{P_3F}}{\overline{S_3F}} = \frac{\overline{P_4F}}{\overline{S_4F}} = \frac{1}{2}$$

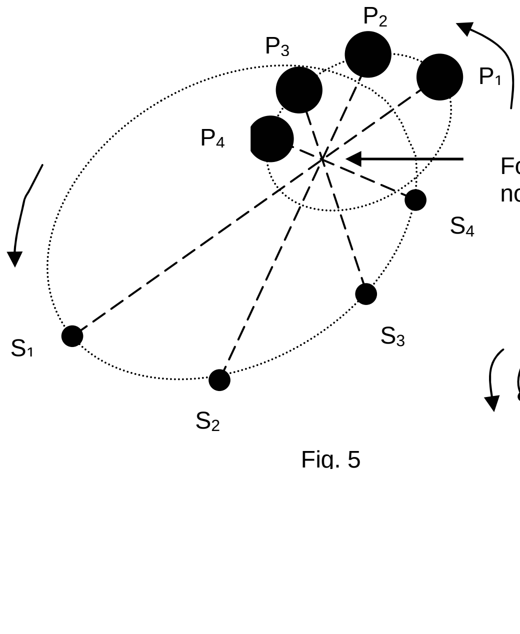

Fig. 5

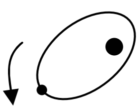

Fig. 6

Na prática toma-se como referência a primária e observa-se a *órbita relativa* (da secundária em relação à primária). Essa órbita também é uma elipse, de maiores dimensões que qualquer das órbitas visíveis à esquerda, com a primária no foco. Como é extremamente raro que o plano orbital comum ao sistema seja perpendicular à linha de visão do observador, a órbita observada apresenta-se distorcida pela perspectiva (*órbita aparente*). Devido a essa distorção, a primária não surge no foco da órbita relativa (Fig. 6).■

Guilherme de Almeida
(CTC da APAA)

Bibliografia

Almeida, Guilherme de; Ré, Pedro — *Observar o Céu Profundo*, (subcapítulo 6.4.), Plátano Edições Técnicas, Lisboa, 2000.