A EXCENTRICIDADE DA ÓRBITA DA TERRA (I)

Guilherme de Almeida

É sabido dos livros de texto que as órbitas dos planetas são elipses. Assim sendo, a Terra não escapa a este facto. Será possível, com meios muito simples, tanto no aspecto material como do ponto de vista matemático, determinar a excentricidade da órbita do nosso planeta em torno do Sol ? É esse o objectivo deste artigo. Pode satisfazer a curiosidade de alguns leitores, que queiram fazer as medições necessárias e comparar os seus resultados com os que se vêem nos livros, ou servir de base a um programa de trabalho numa escola secundária, para alunos que estejam integrados num grupo de Astronomia. Este é o artigo 1 numa série de 2.

Tal como afirma a 1.ª lei de Kepler (publicada em 1609), a órbita que a Terra descreve em torno do Sol é uma elipse, situando-se o Sol num dos focos dessa elipse. Nas figuras que se fazem, muitas vezes exagera-se incrivelmente a forma da órbita do nosso planeta. Há representações que mostram esta órbita como uma circunferência (Fig. 1) e outras insistem numa elipse muito excêntrica (Fig. 2).

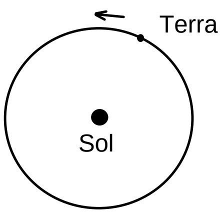

Fig.1

Como a órbita da Terra tem a forma de uma elipse (Fig. 2), o nosso planeta, ao descrevê-la, passa por uma posição que é a mais afastada possível do Sol (o *afélio*), que ocorre por volta de 4 de Julho de cada ano, e por uma outra posição (denominada *periélio*), na qual está à distância mínima da nossa estrela, (próximo de 4 de Janeiro de cada ano).

Como é, de facto a órbita da Terra ? Mais parecida com a da Fig. 1 ou com a da Fig. 2 ? Se fosse como a da Fig. 1, veríamos o Sol sempre com o mesmo diâmetro aparente (Fig. 3) ao longo de todo o ano. Se fosse o caso da Fig. 2 deveríamos ver o Sol *aparentemente* muito menor quando a Terra passa no afélio, e bastante maior no periélio.

Não se deve olhar para o Sol sem protecção visual apropriada. No caso de observações a olho nu, que não sejam muito prolongadas, serve muito bem o filtro de protecção utilizado nas soldaduras por arco eléctrico, à venda nas lojas de ferragens a um preço muito acessível (pode-se comprar só o filtro de vidro ou dois filtros, um para cada olho, já montados em óculos apropriados, o que permite ter as mãos livres).

Cada um de nós, pela experiência pessoal de vários anos de vida que já tem, sabe que pouca diferença se nota: à primeira impressão o Sol parece mostrar-nos o mesmo diâmetro aparente durante todo o ano, o que significa que a órbita da Terra deve parecer-se mais com a Fig. 1 do que com a Fig. 2. Se fosse como na figura 2, o Sol *pareceria* 5 vezes maior no periélio do que no afélio (compare as distâncias), do mesmo modo que um automóvel, visto a 100 m de nós parece cinco vezes maior que a 500 m. Por isso, a desigualdade do tamanho aparente do Sol ao longo do ano é, portanto, um indicador da excentricidade da órbita da Terra.

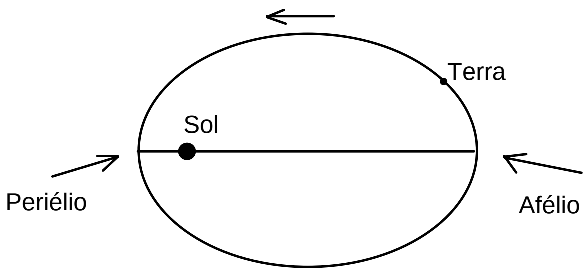

Fig. 2

Como o diâmetro aparente do Sol é pequeno (Fig. 3), pois mede cerca de 0,5º, podemos dizer que este diâmetro aparente é *inversamente proporcional* à distância a que estamos dele. Isto quer dizer que se a distância da Terra ao Sol duplicasse o diâmetro aparente (d) passava para metade, se a distância triplicasse o diâmetro aparente passava para um terço, etc. Para facilitar as indicações que daremos seguidamente, representaremos a *distância* da Terra ao Sol, no **p**eriélio, por r_p ("p" de "periélio") e por r_a no **a**félio. A Fig. 4 mostra alguns parâmetros geométricos de uma elipse. Desta figura concluímos, facilmente, que $r_p = a - c$ e que $r_a = a + c$.

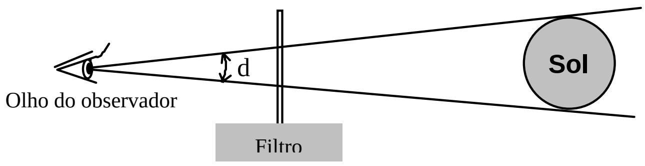

Fig. 3. O diâmetro aparente do Sol é o ângulo indicado pela letra *d*. As dimensões aparentes são sempre angulares. Esta noção é aplicável a outras situações (por. ex. o diâmetro aparente da Lua, ou a altura aparente de um prédio visto a uma certa distância do observador.

Como o diâmetro aparente do Sol, visto da Terra, é inversamente proporcional à distância a que dele nos encontramos, podemos escrever

$$\frac{d_p}{d_a} = \frac{r_a}{r_p}\text{ , ou seja }, \frac{d_p}{d_a} = \frac{a+c}{a-c}.$$

Dá-se o nome de *excentricidade* de uma elipse ao parâmetro $e = c / a$ (Fig. 4), onde d_a é o diâmetro *aparente* do Sol no afélio, e d_p no periélio. Porém, como $c = ea$ (visto que $e = c / a$), pode-se também escrever

$$\frac{d_p}{d_a} = \frac{a+ea}{a-ea} = \frac{a(1+e)}{a(1-e)}$$, que é equivalente a

$$\frac{d_p}{d_a} = \frac{1+e}{1-e}.$$

Desta última expressão concluímos que

$d_p - d_a = e(d_p + d_a)$, e consequentemente,

$$e = \frac{d_p - d_a}{d_p + d_a}.$$

As medições actuais permitem concluir que o diâmetro aparente do Sol varia, ao longo do ano, entre 32,58 ' (no periélio) e 31,51 ' (no afélio), onde ('), é, como se sabe, o símbolo do minuto angular. Baseando-nos nestes valores concluímos que

$$\frac{32{,}58 - 31{,}51}{32{,}58 + 31{,}51} = e$$, de onde obtemos, feitas

as contas, $e = 0{,}016\,69$.

É precisamente esta, segundo as melhores determinações actuais, a excentricidade da órbita do nosso planeta em torno do Sol, valor frequentemente arredondado para 0,0167. Ficámos satisfeitos ? Nem por isso, pois os valores dos diâmetros aparentes do Sol *não eram nossos*, e um amador não pode aspirar a tal exactidão na medição do diâmetro aparente do Sol. Vamos portanto usar valores medidos por nós, com o nosso material e nas nossas condições, nunca excelentes mas que nos poderão proporcionar um outro nível de satisfação.

Projectemos a imagem do Sol, num ecrã de papel, com uma luneta diafragmada ou com um telescópio criteriosamente diafragmado. Não há nada a recear se se diafragmar a *f*/40 (diâmetro do diafragma = 1/40 da distância focal da objectiva). Nas várias medições utilize o *mesmo* telescópio, com a *mesma* ocular para a projecção (de preferência de distância focal entre 20 mm e 30 mm. É essencial que se mantenha constante, *em todas as medições*, a distância desde a ocular até ao ecrã de projecção (use uma vara de madeira como bitola). Nestas condições, o diâmetro da imagem do Sol, projectada no ecrã, é directamente proporcional ao diâmetro angular da nossa estrela.

O ecrã deve estar fixo, ao solo (com tripé), ou ao telescópio. A imagem deverá estar bem focada. Pegue numa régua graduada e, encostando-a ao ecrã, meça o diâmetro da imagem do Sol a 4 de Julho e depois a 4 de Janeiro. Ser-lhe-á difícil medir o diâmetro com erro inferior a 1 mm, e as ondulações do limbo solar não facilitam. Também será difícil saber que estamos mesmo a medir o diâmetro, pois o bordo da régua pode estar a passar ligeiramente ao lado do centro da imagem do disco solar e não se dar por isso.

Pelas razões apontadas convém fazer *várias* medições (pelo menos 4), tirando e voltando a colocar a régua, em cada uma das medições, calculando depois, em cada data, a média dos valores medidos. Por exemplo, admitamos que obtivemos 120,0 mm como *diâmetro médio* da imagem a 4 de Julho, valor que representaremos por D_a (diâmetro da imagem no **a**félio), e 124,5 mm no periélio, a 4 de Janeiro (D_p). Podemos continuar a utilizar a expressão anterior (que relaciona a excentricidade da órbita da Terra com os diâmetros aparentes do Sol no afélio e no periélio

$$e = \frac{d_p - d_a}{d_p + d_a},\quad \text{escrevendo agora}\quad e = \frac{D_p - D_a}{D_p + D_a}$$

visto que, nas condições em que trabalhámos, o diâmetro aparente da imagem projectada no ecrã é

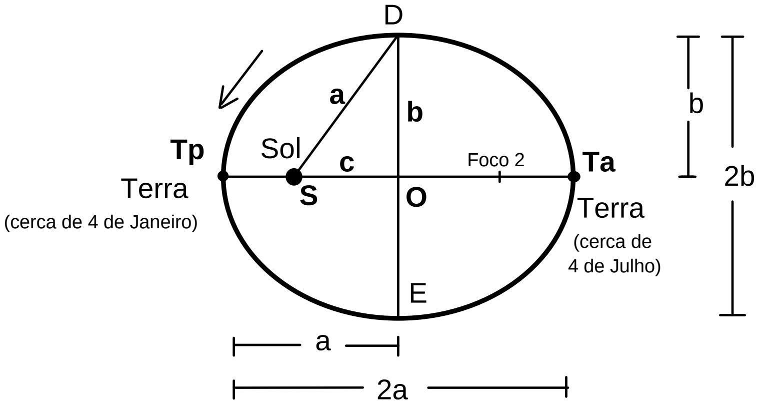

Fig. 4. As indicações **Tp** e **Ta** representam as posições da Terra no periélio e no afélio, respectivamente.

directamente proporcional ao diâmetro aparente do Sol. Introduzindo nesta última expressão os nossos valores de D_p e D_a , obtemos:

$$e = \frac{124{,}5 - 120{,}0}{124{,}5 + 120{,}0} = 0{,}0184 \ ,$$

que é um resultado bastante satisfatório para um trabalho feito com meios tão simples. Repare-se que uma diferença de 0,0184 – 0,0167 = 0,0017, o que em 0,0167, dá um erro relativo de cerca de 10%, mas é possível obter resultados bem melhores. Na série II deste artigo mostrarei os resultados práticos.

Elipse, ou quase circunferência ?

Embora o observador esteja à superfície da Terra, e não no seu centro, podemos desprezar as dimensões do nosso planeta face às dimensões da sua órbita. De facto a órbita da Terra é uma elipse, mas a sua excentricidade é tão pequena que mais parece uma circunferência. Façamos um desenho cuidadoso, e grande, à escala, com o eixo maior (a distância 2*a* na Fig. 4) a valer precisamente 1000,0 mm. Nessas condições, na mesma escala, quanto mediria o eixo menor (distância 2*b* na mesma figura) ?. O cálculo é simples. Da Fig. 4 conclui-se que $a2 = b2 + c2$ (é o conhecido teorema de Pitágoras). Vimos também que $e = c / a$). Portanto,

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2}{a^2 - c^2} = \frac{a}{a^2 - a^2 e^2} \ , \text{ ou seja,}$$

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2}{a^2(1-e^2)} = \frac{1}{1-e^2} \ , \text{ o que nos permite}$$

concluir que

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{1}{1-e^2}} \ , \quad \text{e portanto} \quad \frac{2a}{2b} = \sqrt{\frac{1}{1-e^2}} \ .$$

Introduzindo nesta última expressão o valor da excentricidade da órbita da Terra (e=0,0167) e de 2*a* (que queremos desenhar com 1000,0 mm), concluímos que o eixo menor mediria 999,86 mm (portanto, a diferença 2*a* – 2 *b* é apenas de 0,14 mm). Distingue-se de uma circunferência ?

E o Sol, no desenho, ficaria a que distância do centro da elipse ? Chega-se rapidamente a esse valor, como vamos mostrar. Essa distância (*c* na Fig. 4) , é dada pela relação $c = ea$ (que vimos anteriormente). Por isso, no desenho, c= 0,0167×500 mm = 8,35 mm. Num desenho menor as diferenças seriam ainda menos detectáveis. No "tamanho natural", a órbita da Terra tem

a = 149,598 milhões de quilómetros
b = 149,577 milhões de quilómetros;
c = 2,498 milhões de quilómetros;
e = 0,0167 (não depende da escala, como é óbvio).

Uma elipse com excentricidade igual a zero é,... uma circunferência. Quanto maior for a excentricidade de uma elipse mais alongada esta será. No limite, a excentricidade de uma elipse aproxima-se de 1, sem atingir este valor. A órbita de Plutão, por exemplo tem excentricidade 0,25, no caso de Vénus é apenas de 0,007. A excentricidade da órbita da Lua em torno da Terra é 0,055. Porém, a excentricidade das órbitas dos cometas é bastante superior (cerca de 0,89 no caso do Halley). Sabidas as distâncias ao Sol, em média, no afélio e no periélio, basta fazer

$$\frac{r_a}{r_p} = \frac{1+e}{1-e}, \text{ e portanto } \quad e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$$

para obter a excentricidade da órbita (no caso do Halley r_p e r_a medem aproximada-mente 0,6 u.a. e 10 u.a., respectivamente).

Os jardineiros aprenderam há muito a técnica (empírica) para desenhar elipses (Fig. 5): espetam duas estacas no solo, à distância 2*c* uma da outra; atam um pedaço de corda, de uma estaca até à outra, ficando o comprimento 2*a* de fio *livre* entre as estacas; colocam uma vara afiada, que vai marcar o solo, de modo a esticar o fio, e traçam a elipse, mantendo o fio *sempre* esticado.

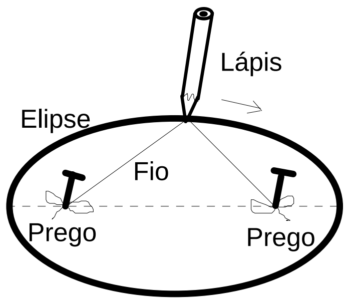

Fig. 5

É fácil desenhar uma elipse com dois pregos e um fio, numa tábua, usando um lápis. Seguindo as indicações dadas, a elipse pode ser traçada de acordo com os parâmetros pretendidos.

Guilherme de Almeida

Referências

Ferreira, Máximo e Almeida, Guilherme de —*Introdução à Astronomia e às Observações Astronómicas*, Plátano Editora, 7.ª Edição, Lisboa, 2004.

Aqui vai o texto biográfico habitual do autor