Onde o céu encontra a Terra

Guilherme de Almeida

A imensidão dos grandes espaços abertos faz-nos pensar que o horizonte geográfico está muito longe: a várias dezenas de quilómetros, para algumas pessoas, mais longe ainda para outras. Neste artigo mostra-se que não é assim e dão-se indicações para calcular a distância até essa linha "onde o mar e o céu se tocam", utilizando conceitos geométricos simples.

Onde o céu encontra a Terra

Embora pareça muito longe, a linha do horizonte está a uma distância do observador bastante modesta e depende exclusivamente do raio do planeta onde nos encontramos, suposto esférico, e da altura do observador relativamente à superfície do planeta.

Considerando um observador em O (Fig. 1), a uma altura *h* relativamente à superfície de um planeta de raio *R*, o ponto P pertence à linha do horizonte, definida como o lugar geométrico dos pontos de tangência à superfície do globo, de todas as direcções que partem de O. Pretendemos calcular a distância *d*, entre O e P, que se determina recorrendo apenas a conceitos geométricos que são extremamente simples, como veremos.

Da Fig. 1 conclui-se facilmente que

$(R+h)^2 = R^2 + d^2$, e portanto

$d^2 = 2Rh + h^2$.

Obtemos assim

$$d = \sqrt{2Rh + h^2}\ .$$

Como em geral $h << R$, podemos escrever, sem grande erro,

$$d = \sqrt{2Rh} \qquad \text{[equação } \mathbf{1}\text{]}.$$

Para o caso da Terra (R=6,378×10^6 m), supondo o observador num oceano (para evitar aos acidentes do relevo), a bordo de um navio e com os olhos a uma altura h=15,0 m acima da superfície líquida, com a equação anterior obtém-se imediatamente

d =13,8×10^3 m (13,8 km).

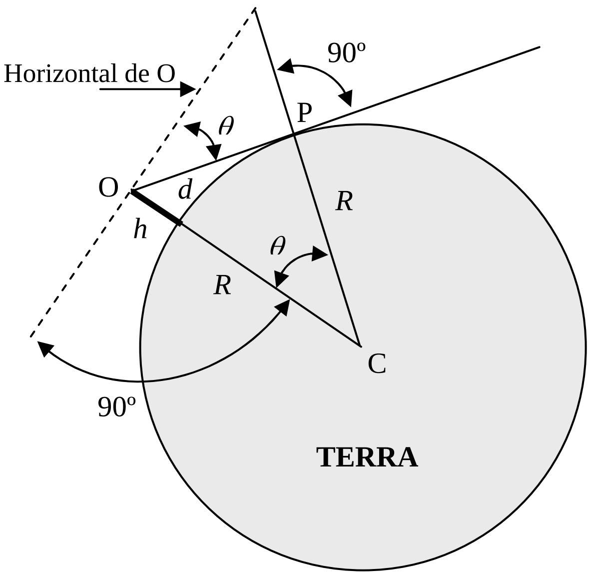

Fig. 1. Elementos geométricos necessários à obtenção da equação [1]. Guilherme de Almeida, 2005.

Quando olha para P, este observador não o faz segundo a direcção horizontal, mas sim segundo o ângulo θ *abaixo* do horizonte (este ângulo é geralmente conhecido como *depressão aparente do horizonte*). O ângulo θ obtém-se facilmente da Fig. 1:

$\tan\theta = \dfrac{d}{R}$. Com os dados anteriormente referidos será $\tan\theta$ = 0,00216 $\Leftrightarrow \theta$ =0,124º = 7,4'.

O resultado seria o mesmo, é claro se o observador estivesse numa planície enorme. Se uma pessoa estiver na praia, com os olhos a 1,60 m da superfície da água, teremos d = 4,5 km e θ valerá apenas 2,4'.

Utilizemos as mesmas expressões para dois *casos extremos*. Para um observador sentado numa praia, mesmo junto à orla marítima, com os olhos a uma altura h=0,90 m, será d=3,4 km e a depressão aparente do horizonte, θ, será somente de 1,8' (menos de 1/30 do grau): a pessoa olhará para a linha do horizonte quase na horizontal. No caso de uma grande altitude, por exemplo h=2000 m d já valerá quase 160 km e θ = 1,43º (85,8'), um valor já considerável: o observador verá a linha do horizonte bastante abaixo da sua direcção horizontal.

A análise que fizemos supõe superfícies *esféricas*, o que não é rigorosamente verdade na Terra e nos outros astros. No entanto, para as pequenas distâncias envolvidas, na vizinhança de O, esta simplificação é perfeitamente legítima.

Onde o horizonte fica mais próximo

A equação [1], anteriormente referida, diz-nos que *d* também depende de *R*, e este facto tem implicações curiosas. Num pequeno planeta como, por exemplo, o asteróide Ceres ($R \approx 480$ km), que é aproximadamente esférico, um observador de pé, com $h = 1{,}60$ m verá o ponto P (adaptando a figura 1 ao caso de Ceres) apenas a 1,24 km, sendo $\theta = 8{,}9'$. No caso do Sol ($R = 7{,}0\times10^8$ m), *se* tivesse superfície sólida e uma temperatura amena, e ainda se a elevada intensidade do campo gravítico não o incomodasse, para $h = 1{,}60$ m o ponto P estaria a cerca de 47 km do observador, que olharia para P quase na horizontal ($\theta = 0{,}2'$). Verificámos assim que a linha do horizonte não fica tão longe quanto as aparências nos parecem fazer acreditar. Levando o exemplo de h=1,60m para a Lua ($R=1{,}738\times10^6$ m), obtém-se $d=2{,}36\times10^3$ m (2,36 km).

A cratera de muralhas invisíveis

As considerações anteriores levam-nos para um caso curioso. Um observador no centro de muitas das crateras lunares não vê a muralha que delimita a cratera!.

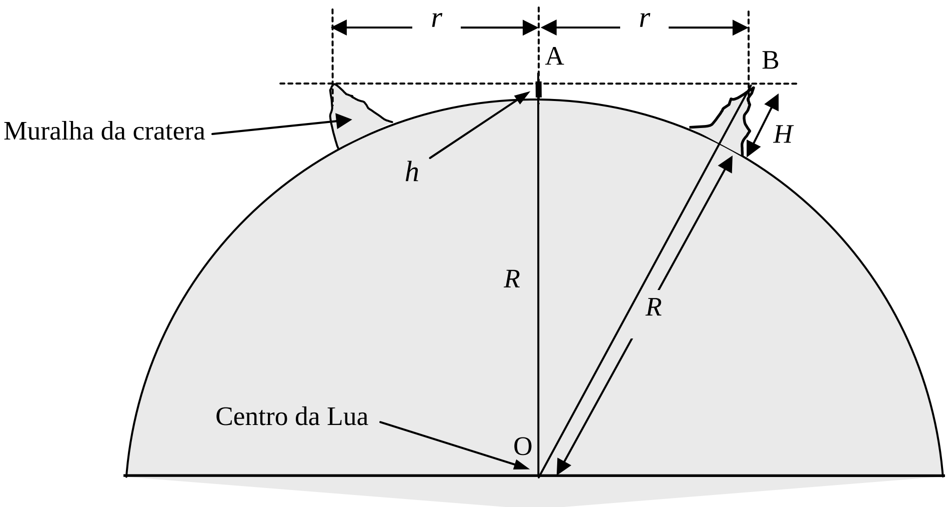

Fig. 2. Situação em que um hipotético observador de altura *h* se encontra no centro de uma cratera lunar ampla, de raio *r*, rodeada de muralhas altas, de altura *H*. Considerou-se uma cratera sem pico central. Guilherme de Almeida (2005).

Consideremos (Fig. 2), o triângulo [OAB]. Utilizando o conhecido teorema de Pitágoras, pode escrever-se

$(R+H)^2 = (R+h)^2 + r^2$; desenvolvendo esta expressão, obtemos

$R^2 + H^2 + 2RH = R^2 + h^2 + 2Rh + r^2$, ou seja, simplificando,

$H^2 + 2RH = h^2 + 2Rh + r^2$. Mas $h \ll R$ e por isso podemos escrever, com muito boa aproximação

$H^2 + 2RH = 2Rh + r^2$,

ou, ainda, $r = \sqrt{H^2 + 2R(H-h)}$ [equação **2**]

Consideremos uma muralha de 3000 m de altura, perante a qual $H - h \approx H$. Nestas condições (equação 2), e entrando no cálculo com o raio lunar ($R=1{,}738\times10^6$ m), obtemos $r=1{,}022\times10^5$ m (102,2 km). Portanto, um observador no centro de uma cratera com 204,4 km de *diâmetro* (ou maior), não poderá ver as muralhas de 3 km de altura porque os seus picos estarão abaixo do horizonte (a Figura 2 mostra a situação limite). A cratera *Clavius*, por exemplo, próximo do pólo sul lunar, tem 240 km de diâmetro. Para muralhas de 1 km, 2 km e 4 km de altura, exigem-se crateras com *raios mínimos* de 59,0 km, 83,4 km e 118,0 km (respectivamente) para que os picos das suas muralhas fiquem ocultos abaixo do horizonte.

Guilherme de Almeida